5. Teste de raiz

> **Lembrete 5.0.1 — Teste de razão.** Seja uma série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, com $x_n > 0$ para todos $n \geq p$, e $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = L$. Então:
> 1) Se $0 \leq L < 1$, série converge.
> 2) Se $L > 1$, série diverge.

5.1 Teste de raiz

Seja $t > 0$. Lembre que $\sum_{n=1}^{\infty} t^n$ converge quando $t = \sqrt[n]{x_n} < 1$, por outro lado $\sum_{n=1}^{\infty} t^n$ diverge para $t = \sqrt[n]{x_n} > 1$. Temos a generalização desse fato:

> **Teorema 5.1.1** Seja uma série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ tal que, $x_n \geq 0$ para $n \geq p$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = L$, então
> 1) Se $0 \leq L < 1$, série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.
> 2) Se $L > 1$ (ou ∞), série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ diverge.
> 3) Se $L = 1$, não podemos concluir nada.

Demonstração. 1) Seja $t \in \mathbb{R}$, tal que $L < t < 1$. Pela definição do limite existe $n_0 \geq p$ tal que

$$z_n = \sqrt[n]{x_n} < t, \quad n \geq n_0.$$

Assim $x_n < t^n, n \geq n_0$. Série $\sum_{n=1}^{\infty} t^n$ converge, logo pelo (TC) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.

2) Seja $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = L > 1$, logo existe $n_0 \geq p$, tal que $\sqrt[n]{x_n} > 1$, para $n \geq n_0$. Portanto $x_n > 1$ para $n \geq n_0$ e $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq 0$. Então $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ diverge.

3) Considere $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$. ■

■ **Exemplo 5.1** Dada série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$. Neste caso

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3}{3^n}} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n})^3 = \frac{1}{3} < 1.$$

Portanto a série converge.

■ **Exemplo 5.2** Dada série $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \left(\frac{2n-1}{n+13}\right)^n$. Neste caso

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{n}\left(\frac{2n-1}{n+13}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2n}} \frac{2n-1}{n+13} == \lim_{n\to\infty} (n^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{2}} \frac{2-\frac{1}{n}}{1+\frac{13}{n}} = 2 > 1.$$

Portanto a série diverge.

■ **Exemplo 5.3** Dada série $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n |x-1|^n$. Quando a série converge? Pelo teste de raiz obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n |x-1|^n : \begin{cases} \text{converge se} 3|x-1| < 1, (\text{ou } \frac{2}{3} < x < \frac{4}{3}), \\ \text{diverge se } 3|x-1| > 1, (\text{ou } x < \frac{2}{3}, x > \frac{4}{3}). \end{cases}$$

Seja $3|x-3| = 1$, então temos $x = \frac{2}{3}$, ou $x = \frac{4}{3}$. Neste caso obtemos a série $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ divergente. Resumindo

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n |x-1|^n : \begin{cases} \text{converge se } \frac{2}{3} < x < \frac{4}{3}, \\ \text{diverge se } x < \frac{2}{3}, x > \frac{4}{3}. \end{cases}$$

5.2 Convergência absoluta e condicional

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ qualquer (x_n não precisa ser positivo agora). Consideremos $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$.

Definição 5.2.1 1) Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ chama-se *absolutamente convergente* se $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ converge.
2) Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ chama-se *condicionalmente convergente* se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge, mas $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ diverge.

■ **Exemplo 5.4** Seja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^{\frac{3}{2}}}$. Estude convergência absoluta. Temos

$$\left|\frac{\cos n}{n^{\frac{3}{2}}}\right| < \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

Seja $y_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, assim $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge. Portanto pelo (TC) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge absolutamente.

Teorema 5.2.1 Se $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ converge.

Demonstração. É obvio que

$$0 \leq |x_n| + x_n \leq 2|x_n|.$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} 2|x_n|$ converge, pelo (TC) $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n| + x_n$ converge. Note que

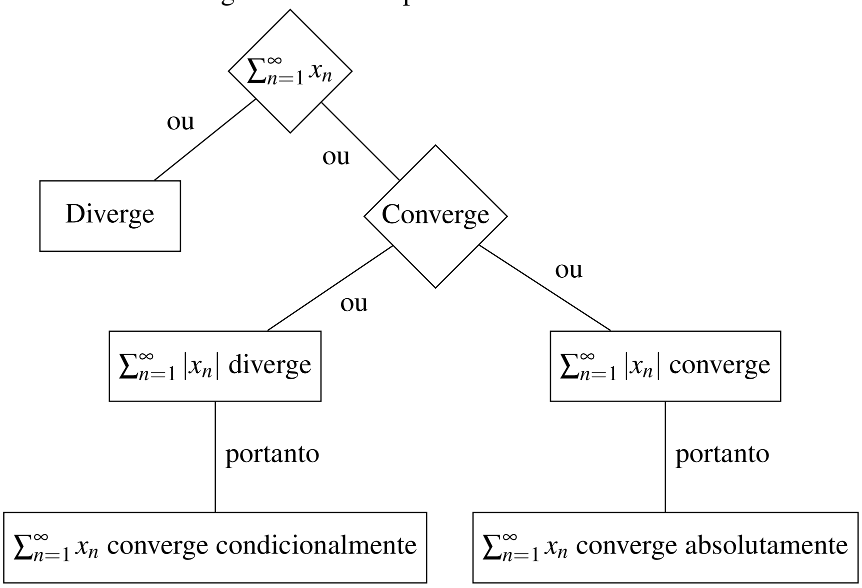
$$x_n = (|x_n| + x_n) - |x_n|$$

logo

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty}[(|x_n| + x_n) - |x_n|] = \sum_{n=1}^{\infty}(|x_n| + x_n) - \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|.$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty}(|x_n| + x_n)$ e $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ convergem, série $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ converge. ■

O estudo da convergência absoluta pode ser resumido como



■ **Exemplo 5.5** Dada série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2+3n+1}$. Estude convergência absoluta.

Solução. Temos

$$\left|\frac{\cos n}{n^2+3n+1}\right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ converge pelo (TC) a série $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos n}{n^2+3n+1}\right|$ converge também. Portanto $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2+3n+1}$ converge absolutamente.
;-)

■ **Exemplo 5.6** Dada série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n!)^3}{(3n)!}$. Estude convergência absoluta dela.

Solução. Seja $x_n = \frac{(n!)^3}{(3n)!}$. Mostremos que $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!}$ converge. Temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^3}{(3(n+1))!} \frac{(3n)!}{(n!)^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3 \cdot (3n)!}{(3n)! \cdot (3n+1)(3n+2)(3n+3)}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^3}{(3+\frac{1}{n})(3+\frac{2}{n})(3+\frac{3}{n})} = \frac{1}{27}$$

Assim pelo teste de razão $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ converge, portanto $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge absolutamente. ;-)

5.3 Testes da convergência em modulo.

Teorema 5.3.1 Seja $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ tal que $x_n \neq 0$ para $n \geq p$ e $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = L$, então as seguintes afirmações são verdadeiras:

1) Se $0 \leq L < 1$, então $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge absolutamente (portanto converge).
2) Se $L > 1$ (ou ∞), então $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ diverge.
3) Se $L = 1$, nada se conclui.

Demonstração. 1) Segue de Teorema 5.2.1 e teste da razão para série com termos positivos.

2) $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = L > 1$ (ou ∞). Portanto $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| > 1, n \geq n_0$, e $|x_{n+1}| > |x_n|$, assim $\lim_{n\to\infty} |x_n| \neq 0$ e $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$. Então $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ diverge. ■

■ **Exemplo 5.7** Estude a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ com $x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{\cos n}{\sqrt{n}} x_n$.

Solução.

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\cos n}{\sqrt{n}}\right| = 0$$

Portanto, pelo Teorema 5.3.1, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge absolutamente. ;-)

■ **Exemplo 5.8** Estude a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}(-1)^n$.

Solução.

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)^{(n+1)}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e > 1.$$

Portanto, pelo Teorema 5.3.1, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ diverge. ;-)

Teorema 5.3.2 — Teste de raiz em modulo. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ e $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = L$, então:

1) Se $0 \leq L < 1$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge absolutamente (portanto converge).
2) Se $L > 1$ (ou ∞), a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ diverge.

3) Se $L = 1$, nada se conclui.

■ **Exemplo 5.9** Seja $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{n+5}\right)^n x^n$, $x \in \mathbb{R}$. Quando a série converge?

Solução. Temos

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+3}{n+5}\right)^n |x|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n+5} \cdot |x| = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n}}{1+\frac{5}{n}} = 2|x|.$$

Agora se $2|x| < 1$ (ou seja, $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$), série converge absolutamente, portanto converge. Se $2|x| > 1$ (ou seja, $x < -\frac{1}{2}$, $x > \frac{1}{2}$), série diverge.

Suponha que $2|x| = 1$ (ou $x = \pm\frac{1}{2}$). Temos 2 casos.

a) Se $x = \frac{1}{2}$, obtemos a série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{2n+3}{n+5}\right)^n$, logo

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{2n+3}{n+5}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2n}{n} \cdot \frac{1+\frac{3}{2n}}{1+\frac{5}{n}}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{3}{2n})^n}{(1+\frac{5}{n})^n} = \frac{e^{\frac{3}{2}}}{e^5} \neq 0.$$

Portanto a série diverge. De fato

$$\lim_{n\to\infty} (1+\frac{3}{2n})^n = \lim_{x\to\infty} (1+\frac{3}{2x})^x = \left| \frac{3}{2x} = \frac{1}{y}, x = \frac{3y}{2} \right| = \lim_{y\to\infty} (1+\frac{1}{y})^{\frac{3y}{2}} = e^{\frac{3}{2}}.$$

b) Se $x = -\frac{1}{2}$, obtemos a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{2n+3}{n+5}\right)^n$. É fácil ver que $\lim_{k\to\infty} x_{2k-1} = -\frac{e^{\frac{3}{2}}}{e^5}$ e $\lim_{k\to\infty} x_{2k} = \frac{e^{\frac{3}{2}}}{e^5}$, portando $\{x_n\}$ diverge e $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ diverge. ;-)

■ **Exemplo 5.10** Seja $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sen}^p \left(\frac{1}{n+2}\right)$. Estude convergência absoluta para $p > 0$.

Solução. $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}^p \left(\frac{1}{n+2}\right)$. Comparamos no limite com a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^p}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}^p \left(\frac{1}{n+2}\right)}{\frac{1}{(n+2)^p}} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^p (x)}{x^p} = 1.$$

Portanto $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge para $p > 1$ e diverge para $p \leq 1$. Assim $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge absolutamente para $p > 1$. ;-)